

# Caos determinístico em um modelo simplificado de cadeia produtiva

Júlio César Bastos de Figueiredo<sup>a\*</sup>

<sup>a\*</sup>jfigueiredo@espm.br, ESPM, Brasil

## Resumo

Este trabalho tem por objetivo apresentar um modelo teórico simplificado de cadeia produtiva onde as relações entre o número de competidores, os tempos de resposta para ajustes da produção e a intensidade da resposta das empresas levam intrinsecamente ao surgimento de oscilações caóticas na oferta e na demanda. No modelo proposto, desenvolvido com o uso da metodologia de dinâmica de sistemas, as flutuações irregulares na demanda e nos preços estão intimamente relacionadas com a própria estrutura da cadeia, ou seja, com suas regras, políticas e capacidades produtivas. São feitas considerações sobre a importância do estudo de caos aplicado à economia e são discutidas técnicas para caracterização de comportamento caótico em séries econômicas.

## Palavras-chave

Cadeia de suprimentos. Ciclos caóticos. Dinâmica de sistemas.

## 1. Introdução

Os setores econômicos evoluem de forma dinâmica ao longo do tempo. As relações entre as empresas, os governos e os mercados são complexas e fazem com que não apenas a estrutura e o comportamento dos mercados afetem as empresas, mas também com que, em algumas situações, o comportamento das empresas leve a mudanças na estrutura e no comportamento dos mercados.

Para se estudar a influência dos mercados sobre o comportamento das empresas em geral opta-se por uma abordagem clássica derivada da microeconomia. Nela, as cadeias produtivas são entendidas como um conjunto de atores, basicamente empresas e consumidores que estabelecem relações de troca de informação e produtos. Tais relações podem levar a um equilíbrio fixo estável do sistema, mas também pode dar origem a oscilações intrínsecas e complexas (LEE; PADMANABHAN; WHANG, 2004).

As abordagens mais apropriadas para tratar o ambiente empresarial e econômico hoje em dia são aquelas fundamentadas nos paradigmas sistêmicos, cuja ênfase está na compreensão da estrutura do modelo dinâmico subjacente aos processos. De

modo não rigoroso, um modelo dinâmico pode ser definido como uma estrutura teórica (mental, matemática, computacional etc.) utilizada para modelar determinados fenômenos cujos estados, ou uma descrição instantânea deles, evoluem no tempo.

Entende-se hoje que a economia e os processos de negócios são sistemas não lineares em permanente processo de auto-organização, que constantemente apresentam novas propriedades emergentes (BROCK; DECHERT, 1990; LEBARON, 1994; WILDING, 1998). Todavia, boa parte dos modelos teóricos hoje existentes tende a considerar apenas relações lineares entre os elementos econômicos e produtivos dos mercados, desconsiderando ciclos de realimentação, tempos de retardos e mesmo comportamento caótico.

Embora muito do comportamento entre firmas tenha sido modelado com sucesso na economia e nas escolas de estratégia empresarial utilizando a teoria dos jogos (CAMERER, 1991), esses modelos tendem a presumir em geral a emergência apenas de equilíbrios fixos estáveis. Tais equilíbrios podem não refletir adequadamente a dinâmica dos setores econômicos envolvidos. Qualquer aparente estabilidade fixa

costuma ser breve, pois se mostra sensível a mínimas perturbações do ambiente. Além disso, as trajetórias competitivas das empresas são influenciadas pelos seus passos passados – *path dependence* – (ARTHUR, 1994). Essa dependência do caminho reforça o caráter não linear das interações e compromete ainda mais a capacidade de compreensão e previsibilidade dos fenômenos.

Por exemplo, muitas vezes as empresas acreditam que determinado comportamento externo do mercado é criado por mecanismos exógenos ao setor, quando na verdade a estrutura competitiva intrínseca das empresas é que pode estar gerando instabilidades.

## 2. Dinâmica de sistemas

É inegável a importância do pensamento sistêmico hoje em dia no processo de planejamento (PIDD, 1984; SENGE, 1994; GEORGANTZAS; ACAR, 1995). Ao analisar uma cadeia produtiva sob a óptica da teoria dos sistemas, vê-se que ela é composta de inúmeros elementos que por si só podem ser considerados subsistemas. Esses elementos são integrados entre si e se relacionam funcionalmente objetivando a realização de um ou mais propósitos. As empresas de um lado recebem *inputs* do ambiente (materiais, informações etc.) e os transformam em *outputs* (produtos, resíduos etc.), que são então novamente devolvidos ao ambiente. A abordagem sistêmica do processo de planejamento da administração tem como ponto de partida a construção dos modelos mentais que descrevem esses sistemas (SENGE, 1994). Tais modelos são representações das estruturas subjacentes aos sistemas organizacionais ou sociais que estão sendo analisados. Procura-se com eles examinar a inter-relação causal das forças estruturais em um contexto mais amplo que permita entendê-las como parte de um processo comum (PIDD, 1996).

A dinâmica de sistemas é uma metodologia ligada ao pensamento sistêmico que busca estudar as estruturas dos sistemas organizacionais e sociais por meio da representação das relações causais entre os seus elementos e por meio do estudo de sua evolução ao longo do tempo. Busca explicar o comportamento de um determinado sistema partindo das interações entre as diversas partes que o compõem (FORRESTER, 1961; PIDD, 1984; STERMAN, 2000). Para isso são utilizadas ferramentas computacionais que permitem aos pesquisadores testar diferentes políticas e soluções para a operação do sistema, avaliando o impacto de suas decisões e proporcionando um conjunto de instrumentos para compreensão e comunicação sobre os modelos construídos (FERNANDES, 2001).

Em dinâmica de sistemas a ideia fundamental é que o comportamento dinâmico de um sistema obedece a um princípio chamado de *princípio da acumulação*. Esse princípio postula que a resposta dinâmica de um sistema é consequência da transição dos valores de seus recursos acumulados em estoques, e que essas transições são controladas por fluxos de entrada e saída nos estoques. Esse princípio leva a uma forma particular de representação causal conhecida por *diagramas de estoque e fluxo* (STERMAN, 2000).

Nesses diagramas os estoques, ou níveis, são representados graficamente por retângulos. Eles representam caixas onde se acumula algum recurso do sistema. Os estoques são variáveis cujo valor, ou estado, depende dos fluxos. Os fluxos são representados por setas de traço duplo cortadas por um triângulo. Os fluxos representam o transporte dos recursos dentro do sistema. São vazões, e por isso são representados por um ícone parecido com um cano com uma torneira. A Figura 1 mostra a representação básica de um estoque controlado por um fluxo em dinâmica de sistemas. A nuvem em uma das pontas da seta representa uma fonte infinita alimentando o estoque B por meio do fluxo A.

Na Figura 1 o valor do estoque B é controlado pelo fluxo A. Esse controle pode ser expresso por meio de uma equação diferencial que descreve as transições dos valores do estoque B entre os instantes t e t+dt. Essas transições são descritas pela Equação 1:

$$B(t + dt) = B(t) + A(t) \cdot dt \Rightarrow A(t) = \frac{dB}{dt}. \quad (1)$$

No processo de modelagem com diagramas de estoque e fluxo, tanto variáveis físicas como de informação podem fluir pelos fluxos se acumulando em estoques. Esse acúmulo é decorrente da diferença entre os fluxos de entrada e os fluxos de saída. Logo, os recursos ao longo do tempo não podem mudar instantaneamente de valor.

Os valores futuros dos estoques são o foco das decisões dos gestores. Os fluxos representam as políticas do sistema. Eles podem ser descritos na forma de equações algébricas que podem envolver variáveis auxiliares e, ou, o valor atual dos estoques (MORECROFT; ASAY; STERMAN, 1994). É importante notar que os fluxos atuais de um sistema são modificados por ações presentes, que decorrem de decisões no tempo atual, enquanto os estoques

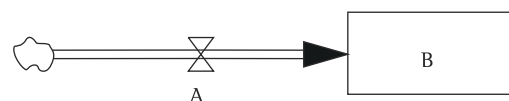


Figura 1. Estoque (B) controlado por um fluxo (A). Fonte: autor

presentes são decorrência do acúmulo de efeitos de todas as decisões passadas (FORRESTER, 1969).

Uma das principais vantagens do uso da metodologia de dinâmica de sistemas provém de sua capacidade de melhorar o desempenho no processo de modelagem, principalmente quando buscamos estudar fluxos de material, informação e dinheiro dentro de estruturas econômicas (FERNANDES, 2001).

### 3. O modelo desenvolvido

A Figura 2 apresenta o modelo simplificado de cadeia produtiva desenvolvido neste trabalho. Nesse modelo a demanda  $d$  é uma função do preço  $p$ . A função entre demanda e preço (chamada *função de demanda*) permite determinar a quantidade de consumidores que estão dispostos a comprar o produto por um determinado preço. Neste trabalho, optou-se por utilizar uma função de demanda sigmoidal, dada pela Equação 2.

$$d(t) = \phi \frac{\alpha^\gamma}{\alpha^\gamma + p(t)^\gamma} \quad (2)$$

Na equação 2 o parâmetro  $\phi$  é um parâmetro de escala que determina o valor máximo que a demanda pode atingir quando  $p(t) \rightarrow 0$ . O parâmetro  $\alpha$  representa o preço de corte da demanda. Já o parâmetro  $\gamma$  indica a intensidade de queda da demanda quando  $p(t)$  aproxima-se do preço de corte. A Equação 2 é uma das formas básicas de uma função sigmoidal clássica conhecida como função de Hill (HEIDEL; MALONEY, 1999). A Figura 3 mostra dois exemplos de curvas obtidas a partir da Equação 2. Nessa figura pode-se perceber a dependência que a função de demanda adotada tem em relação ao parâmetro  $\gamma$ . Quanto maior o valor de  $\gamma$ , mais rapidamente a demanda reage às variações no preço.

O preço  $p$  é definido no modelo como sendo função do estoque  $E$ . O estoque  $E$  representa o estoque total agregado de bens acabados de todos os produtores no mercado. Supõe-se, por simplicidade, que os produtos não possuem diferenciação, de tal forma que os níveis de estoque individuais das empresas podem ser agregados em um único estoque de mercado. Esse estoque é responsável pela oferta direta de produtos no mercado, afetando os preços. A *função de preço* é aquela que permite determinar o preço que os consumidores estão dispostos a pagar por uma determinada quantidade ofertada. Para manter a consistência com a função de demanda utilizada, define-se a função de preço também como uma função sigmoidal.

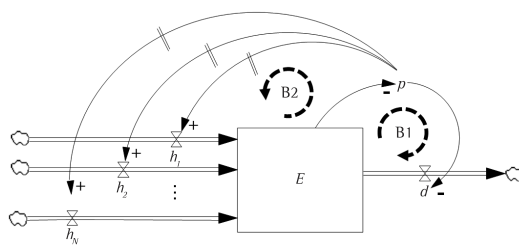


Figura 2. Modelo simplificado de cadeia produtiva desenvolvido neste trabalho. Fonte: autor.

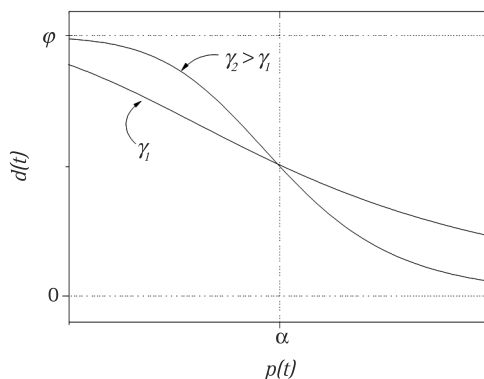


Figura 3. Exemplos de curvas de demanda obtidas a partir da Equação 2 para dois valores distintos do parâmetro  $\gamma$ . Fonte: autor.

$$p(t) = \Phi \frac{\beta^\lambda}{\beta^\lambda + E(t)^\lambda} \quad (3)$$

Na Equação 3 o parâmetro  $\phi$  é um parâmetro de escala que determina o valor máximo que o preço pode atingir quando  $E(t) \rightarrow 0$ . O parâmetro  $\beta$  representa o valor do estoque (oferta) de corte. Já o parâmetro  $\lambda$  indica a intensidade de queda no preço quando  $E(t)$  aproxima-se do valor de corte. Deve-se perceber que no modelo apresentado o estoque  $E$  também é afetado diretamente pelo fluxo da demanda, ou seja, a demanda “escoa” os produtos para o mercado. Essa relação acaba por formar um ciclo de realimentação negativa (B1 na Figura 2) que representa o ciclo do equilíbrio econômico clássico oferta-preço-demanda.

Na Figura 2,  $h_1, h_2, \dots, h_N$  representam os fluxos de produção de  $N$  empresas que atuam no mercado. Essas empresas produzem produtos pouco diferenciados que irão abastecer o estoque agregado  $E$ . Supõe-se que os fluxos produtivos das empresas são definidos pelas expectativas de ganhos dessas empresas, e que essas expectativas são proporcionais ao preço de mercado de seus produtos. Ou seja, preços altos de mercado (acima de um determinado patamar de corte) tenderão a disparar a produção das empresas, enquanto preços baixos tenderão a limitar essa produção. Considera-se que as empresas têm capacidades

distintas de reação, ou seja, os preços que motivam a reação de produção diferem de empresa para empresa, alterando o momento da decisão de produzir (BEAN, 1929; FRASER, 1988).

Nem todas as empresas podem ter a mesma velocidade de reação, algumas podem demorar mais para adequar sua produção às variações de preço, outras podem reagir mais rapidamente. Em geral, tempos de retardo são naturalmente identificados entre o início do processo de produção e a entrega final dos produtos no mercado. Mas também podem estar presentes entre a detecção de alguma condição externa de mercado e o efetivo ajuste do processo produtivo interno das empresas. Para capturar essa eventual característica no modelo, considera-se que as funções de produção  $h_i$  das empresas são funções do preço praticado em certo instante de tempo no passado, de acordo com a Equação 4:

$$h_i(t) = k_i \frac{p(t - \tau_i)^{n_i}}{p(t - \tau_i)^{n_i} + \theta_i^{n_i}} \quad (4)$$

Na equação 4 o índice  $i$  indexa as empresas. O tempo de retardo que cada empresa leva para reagir às variações de preço é representado por  $\tau_i$ , sendo que o preço que gera reação em cada empresa é dado  $\theta_i$ . Os parâmetros  $k_i$  são parâmetros de escala que representam o valor máximo de produção que cada empresa pode atingir. Por fim,  $n_i$  representa a intensidade de resposta de cada empresa quando o preço de mercado se aproxima do preço de corte.

O fato dos fluxos produtivos das empresas alimentarem o estoque  $E$  acaba por formar um segundo conjunto de ciclos de realimentação negativa (B2 na Figura 2). Esses ciclos representam os ciclos de regulação da capacidade produtiva de cada empresa. Note que o modelo apresenta apenas ciclos de realimentação negativa, o que indica a presença de características de autorregulação (BENABOU; TIROLE, 2004). Todavia, tal fato não implica que soluções complexas não possam surgir no sistema. De fato, veremos mais adiante que pontos fixos e soluções periódicas podem dar lugar a soluções caóticas dependendo dos parâmetros adotados.

O estoque de produtos acabados  $E$  é a única variável que se acumula no sistema e, portanto, é o único recurso crítico existente. Em razão disso será escolhida como a variável de interesse neste estudo. O valor do estoque  $E$  pode ser expresso por meio da seguinte equação diferencial (obtida a partir do modelo da Figura 2):

$$\frac{d}{dt} E(t) = -d(t) + \sum_{i=1}^N h_i(t). \quad (5)$$

O estudo analítico de equações diferenciais com retardo similares à Equação 5 é complexo, mesmo nos casos onde a função  $h$  é linear. Todavia, as propriedades dinâmicas desse tipo de equação podem ser extraídas do estudo das séries temporais geradas pela integração numérica da equação (BAKER; BOCHAROV; RIHAN, 1999; BELLEN; ZENNARO, 2003). Felizmente as ferramentas de simulação de dinâmica de sistemas já são desenhadas para programar e simular de maneira natural estruturas como as da Figura 2. Pode-se, com o uso dessas ferramentas, integrar numericamente as equações para a obtenção da evolução do sistema.

Cabe ao modelador especificar as funções que definem cada variável e então deixar que o sistema se encarregue da solução numérica (EBERLEIN, 2003). Neste trabalho as soluções da Equação 5 serão integradas com o auxílio do *software* Vensim PLE da Ventana System (EBERLEIN, 2003).

Em muitas situações, ao se estudar um sistema dinâmico, a única fonte de informação que temos é uma série temporal, onde se desconhecem as equações de movimento do sistema que produziram essa série (FERRARA; DO PRADO, 1994). Nos processos regulares, isto é, processos periódicos ou quase periódicos, tal problema pode ser resolvido mais facilmente, pois os processos podem ser identificados através de métodos tradicionais de análise de séries temporais (BOX; JENKINS; REINSEL, 1970; WEI, 1990). Já em sinais irregulares, o ponto de partida é utilizar os métodos de análise de séries temporais não lineares (KANTZ; SCHREIBER, 2004), visto que a irregularidade é uma característica que pode ser causada por sistemas dinâmicos não lineares. Eventualmente pode-se pensar na incorporação de uma componente estocástica pelo sinal irregular. Dessa forma temos que assumir que a componente estocástica é pequena e essencialmente não muda as propriedades não lineares (KANTZ; SCHREIBER, 2004). Nas próximas seções apresentaremos um resumo das principais técnicas de caracterização de sistemas dinâmicos e aplicaremos ao modelo proposto para caracterização de comportamento caótico.

#### 4. Estudo das soluções do modelo

Considere o conjunto de parâmetros listado na Tabela 1. Os dados dessa tabela representam uma cadeia produtiva com três empresas ( $N = 3$ ) onde os tempos de retardo ( $\tau_i$ ) para ajuste na produção e os valores dos preços de corte ( $\theta_i$ ) diferem entre si. Considera-se que as três empresas têm limites idênticos de capacidade produtiva ( $k_1 = k_2 = k_3 = 1/3$ ) e que também reagem com a mesma intensidade ao detectar a proximidade do preço de corte, ou seja,  $n_1 = n_2 = n_3 = n$ . Esse conjunto de parâmetros foi

escolhido porque restringe as soluções do sistema ao intervalo  $0 \leq E(t) \leq 1$  e porque apresenta, para alguns valores  $n$ , soluções caóticas. Outros tipos de solução, tais como pontos fixos estáveis, surgiram para valores diferentes de parâmetros, mas não serão tratadas neste trabalho.

As séries temporais da Equação 5, simulada com o conjunto de parâmetros da Tabela 1, e para valores de  $n$  correspondentes a  $n = 45$ ,  $n = 53$ ,  $n = 56$  e  $n = 60$  podem ser vistas na Figura 4. As séries temporais dos gráficos 4a-c são periódicas com períodos de proporções 1:2:4 respectivamente. A série temporal do gráfico 4d é aparentemente aperiódica.

Tabela 1. Conjunto de parâmetros da Equação 5 que leva à obtenção de soluções caóticas.

$N = 3$
$\varphi = \phi = 0,75$
$\gamma = \lambda = 3$
$\alpha = \beta = 0,6$
$\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 1/3$
$\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta$
$\theta_1 = 0,4; \theta_2 = 0,5; \theta_3 = 0,6$
$\tau_1 = 0,6; \tau_2 = 1,9; \tau_3 = 0,8$

Fonte: autor.

Para melhor visualizar-se a diferença nos períodos das séries temporais, podem ser construídos os espectros de potência. Os espectros de potência são gráficos que representam o quadrado da amplitude da transformada de Fourier do sinal (KANTZ; SCHREIBER, 2004). São utilizados tipicamente para identificação de frequências. A Figura 5 apresenta os espectros de potência das séries temporais da Figura 4.

Na Figura 5a vê-se um espectro de potência com um pico correspondente a uma frequência principal acompanhada por harmônicos de frequências mais altas. Note que o pico correspondente à frequência principal do sistema ainda aparece nos demais espectros de potência dessa Figura. Observe também que quando se aumenta o valor de  $n$ , passando-se de  $n = 45$  (Figura 5a) para  $n = 53$  (Figura 5b), um novo pico correspondente à metade da frequência principal é somado ao espectro, e surge um novo conjunto de harmônicos cujas frequências são metade das frequências dos harmônicos anteriores. O mesmo fato ocorre quando passamos de  $n = 53$  (Figura 5b) para  $n = 56$  (Figura 5c). Esse processo é chamado de *duplicação de períodos* e, em geral, ocorre com o aumento do parâmetro de controle (no nosso caso  $n$ ) até que é alcançado um regime como o da Figura 5d, onde um número infinito de frequências baixas e

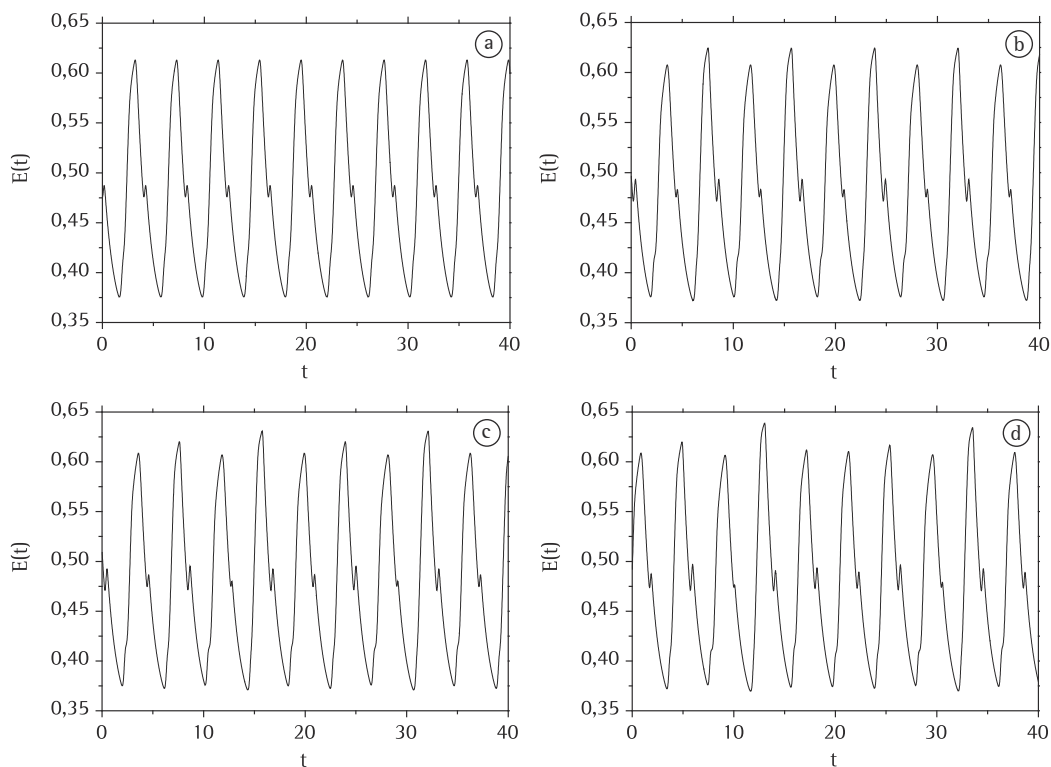


Figura 4. Séries temporais obtidas a partir da Equação 5 para o conjunto de parâmetros indicados na Tabela 1. Gráficos: a)  $n = 45$ , b)  $n = 53$ , c)  $n = 56$  e d)  $n = 60$ . Fonte: autor

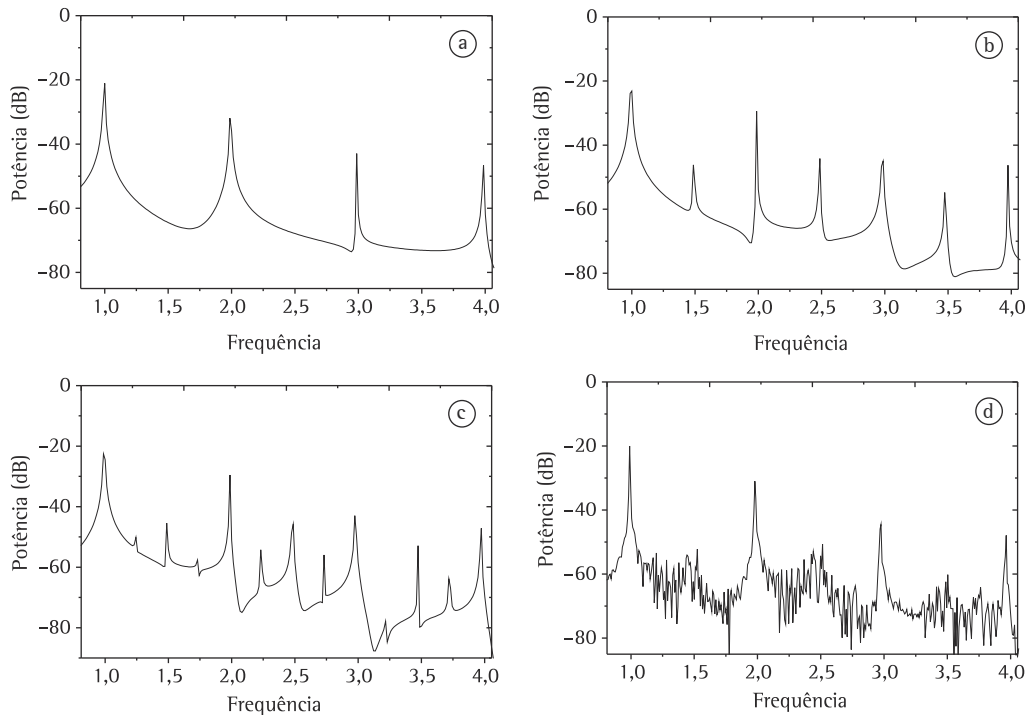


Figura 5. Espectros de potência correspondentes às séries temporais da Figura 4. Fonte: autor.

seus harmônicos acabam por criar um espectro de banda larga (aperiódico).

Sabe-se que séries temporais caóticas apresentam espectro de potência de banda larga (THOMPSON; STEWART, 2002). Todavia, um espectro desse tipo, como o que se vê na Figura 5d, ainda não é suficiente para caracterizar um regime como sendo caótico. Sinais estocásticos como o ruído branco, e mesmo sinais onde o número de componentes harmônicos é muito grande, podem gerar esse tipo de comportamento. Para caracterização de uma solução como caótica, métodos complementares devem ser empregados.

## 5. Caracterização de soluções caóticas

Para descrever o estado de um sistema em dado instante no tempo é necessário definir-se um espaço matemático abstrato constituído pelas variáveis dinâmicas desse sistema. Esse espaço é conhecido como *espaço de fases* (ou ainda *espaço de estados*) (THOMPSON; STEWART, 2002). Ao evoluir nesse espaço, o sistema traça uma trajetória que é conhecida como *trajetória de fase* do sistema.

Em alguns sistemas a evolução das trajetórias de fase tende a ficar limitada a uma região restrita do espaço. Por mais que tentemos afastar o sistema dessa região ele é atraído de volta a ela. Quando isso ocorre, a trajetória é chamada de *atrator* do

sistema (ECKMANN, 1981). Os exemplos mais simples de atratores são pontos fixos, que correspondem a soluções constantes no tempo, ou *ciclos limite*, que são trajetórias oscilantes periódicas. Todavia, existem outros tipos de atratores, chamados de *atratores estranhos*.

Um atrator é denominado estranho quando a sua trajetória de fase depende sensivelmente das condições iniciais (RUELLE; TAKENS, 1971). Em um atrator estranho, pontos inicialmente próximos se separarão exponencialmente depois de um intervalo de tempo suficientemente longo. Todavia, o atrator se mantém sempre em uma região limitada do espaço de fases. A única maneira pela qual trajetórias podem divergir exponencialmente, e ainda assim se manter limitadas a uma região do espaço, é se essas trajetórias se contraírem em algumas direções e se expandirem em outras, permanecendo assim em uma região finita. Esse processo de formação dos atratores estranhos é conhecido por processo de *dobra e estiramento* (ou *foliação*) (FERRARA; DO PRADO, 1994).

Sistemas dinâmicos que apresentam atratores estranhos possuem algumas características comuns fundamentais: (a) *imprevisibilidade*, ou seja, o conhecimento do estado do sistema durante um tempo arbitrariamente longo não permite prever, de maneira imediata, a evolução posterior. A imprevisibilidade está associada à dependência das condições iniciais; (b) *espectro contínuo de frequências*, caracterizando

um comportamento aperiódico; e (c) *invariância de escala*, significando a existência de uma estrutura hierárquica no espaço de fase, com dimensão não inteira e com características de *autossimilaridade* nas estruturas do atrator.

Essas características definem o chamado comportamento caótico de um sistema. E, por isso, os atratores estranhos são também chamados de *atratores caóticos*. É importante ressaltar que o comportamento caótico de um sistema, representado principalmente pela dependência das condições iniciais, é resultado das características dinâmicas intrínsecas do sistema, não sendo produzido por perturbações de natureza estocástica. Por isso, esse comportamento é caracterizado como sendo *caótico determinístico*.

Para caracterizar e analisar as propriedades dinâmicas de um atrator caótico é necessário reproduzi-lo em um espaço de fases de dimensão adequada. É possível reproduzir certas propriedades topológicas do atrator original de um sistema utilizando um método simples, conhecido como *reconstrução de Takens* (TAKENS, 1981). Nesse método, vetores  $m$ -dimensionais são reconstruídos a partir de uma série temporal discreta  $\{x_j\}$  por meio do vetor

$$\vec{\xi}_j = \{x(t_j), x(t_j + s), \dots, x(t_j + (m - 1)s)\}, \quad (6)$$

onde  $m$  é chamado de *dimensão de imersão* e  $s$  de *passo de reconstrução*.

A informação inicial requerida para resolver numericamente uma equação diferencial com retardo é uma função definida, no caso de um único retardo  $\tau$ , no intervalo  $[-\tau, 0]$ . No caso de vários retardos  $\tau_i$ , a função inicial deve ser definida no intervalo  $[-\max(\tau_i), 0]$ . Sendo assim, o espaço de fase natural do sistema é um espaço de dimensão infinita. Todavia, Farmer (1982) mostrou que os atratores de tais sistemas podem ser imersos em um espaço de dimensão finita. Segundo Farmer (1982), a dimensão dos atratores de equações diferenciais com retardo similares à equação apresentada neste trabalho tem dimensão da ordem de 2 ou 3. De fato, diversos trabalhos utilizaram atratores de dimensão igual a 2 para estudar equações diferenciais com retardo similares à apresentada neste trabalho e caracterizar sua dinâmica (GLASS; MALTA, 1990; MALTA; TELES, 2000; MALTA; FIGUEIREDO, 2000; FIGUEIREDO et al., 2002).

Os gráficos da Figura 6 mostram os atratores reconstruídos por meio do método de Takens para as séries temporais da Figura 4 (com  $m = 2$  e  $s = 0,6$ ). Os atratores das Figuras 6a-c são periódicos. Não importa o número de pontos da série temporal utilizados para

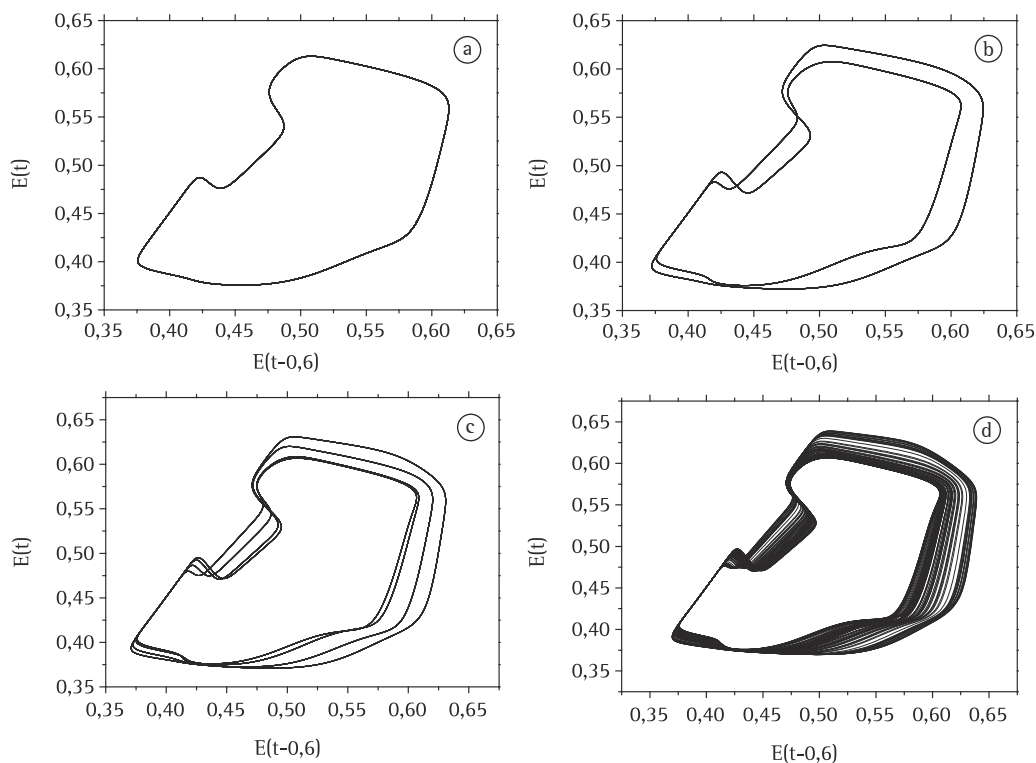


Figura 6. Atratores reconstruídos utilizando o método de Takens com  $m = 2$  e  $s = 0,6$  para as séries temporais da Figura 4. Fonte: autor.

a reconstrução, o comprimento da trajetória de fase limita-se sempre à trajetória das órbitas representadas na figura. Já na Figura 6d vemos uma série temporal aperiódica e, nesse caso, se aumentarmos o número de pontos utilizados para a reconstrução, o atrator preencherá mais densamente o espaço de fases. Além disso, observa-se ao simular a evolução do sistema, a partir de várias condições iniciais, que há uma mudança na forma como as trajetórias do atrator da Figura 6d são preenchidas, ou seja, a trajetória depende das condições iniciais utilizadas.

É difícil ter uma boa ideia acerca da dinâmica de um sistema observando apenas a estrutura dos atratores no espaço de fases, principalmente no caso de atratores caóticos. Isso se deve ao emaranhado desenhado por esses atratores no espaço. O emaranhado é decorrente do processo de alongamentos e dobras pelo qual esses atratores evoluem (GRASSBERGER; PROCACCIA, 1983b). Para ter-se uma ideia mais clara sobre esse processo, pode-se fazer uso de *mapas unidimensionais*.

Um mapa unidimensional  $F$  é uma função que fornece o próximo estado,  $F(x)$ , de um sistema dado o seu estado atual,  $x$ , ou seja:  $x_{i+1} = F(x_i)$  (THOMPSON; STEWART, 2002). Existe um método que permite reduzir as trajetórias de fase de um sistema a um mapa unidimensional discreto. Nesse método, uma

superfície é colocada no caminho das trajetórias de fase e é atravessada por elas. Cada um dos cruzamentos da trajetória de fase com a superfície é registrado e é então construído um gráfico dos cruzamentos sucessivos. Esse gráfico é chamado *mapa de retorno* (THOMPSON; STEWART, 2002).

No caso dos atratores da Figura 6, os mapas de retorno foram obtidos considerando-se os sucessivos cruzamentos da trajetória de fase com a linha  $E(t) = 0,45$  quando  $dE/dt < 0$ . Define-se então  $x_i$  como sendo o valor de  $E(t)$  correspondente ao  $i$ -ésimo cruzamento dessa seção. O gráfico formado pelos pontos no espaço  $(x_i, x_{i+1})$  é o mapa de retorno (Figura 7).

Na Figura 7, em cada um dos gráficos foram computados 200 cruzamentos com a linha  $E(t) = 0,45$ , porém, apenas na Figura 7d todos os cruzamentos corresponderam a pontos distintos no espaço  $(x_i, x_{i+1})$ . Observe que a distribuição final dos pontos nesse plano formou uma curva que pode ser aproximada por uma função com um único mínimo. É sabido que esse tipo de mapa unidimensional discreto (com um único extremo) é típico de alguns sistemas que apresentam caos (FEIGENBAUM, 1978; ECKMANN, 1981).

Quando a dimensão de reconstrução dos atratores é apropriada, o número de pontos no mapa de

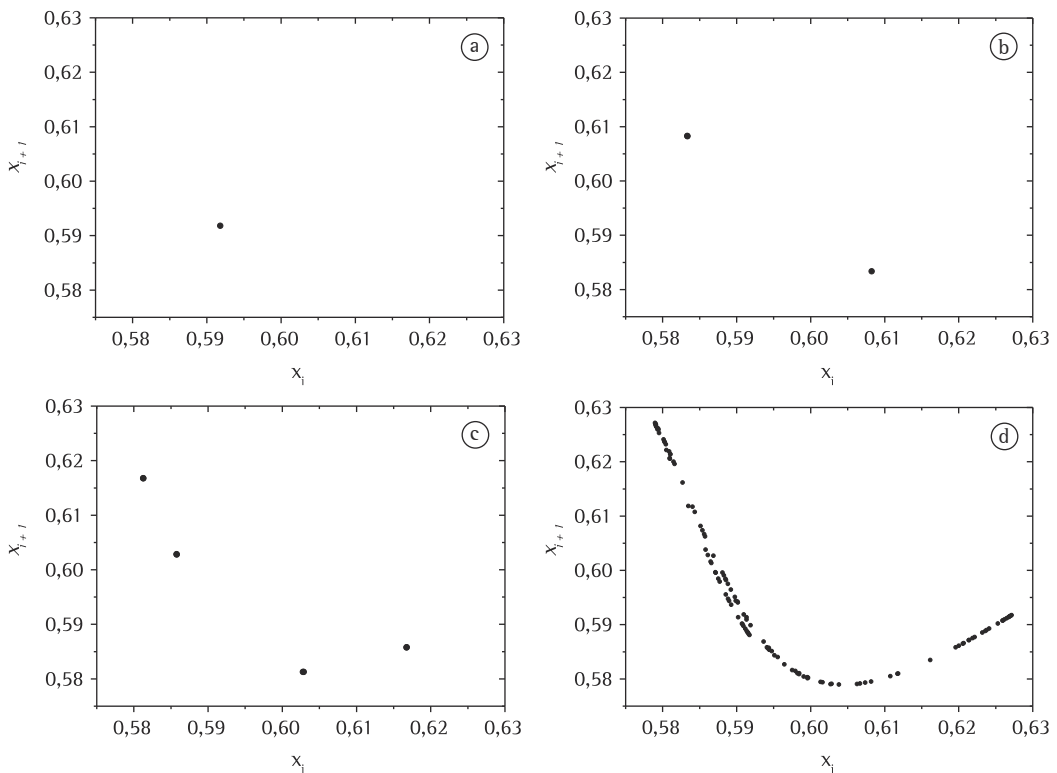


Figura 7. Mapas de retorno obtidos a partir dos atratores da Figura 6. Considera-se para cada atrator os sucessivos cruzamentos da trajetória de fase com a linha  $E(t) = 0,45$  com  $dE/dt < 0$ . Foram computados 200 cruzamentos em cada Figura. Fonte: autor.



retorno representará o período da órbita original do atrator reconstruído, ou seja, uma órbita de período 1 corresponderá a um único ponto, uma órbita de período 2, a dois pontos e assim sucessivamente. Se a órbita gerada for caótica, o número de pontos no mapa será grande e igual ao número de iterações computadas. É isso que vemos na Figura 7d.

O parâmetro  $n$  foi escolhido neste estudo como parâmetro de controle do sistema. Percebe-se que mudanças nesse parâmetro alteraram a estabilidade dos atratores, mudando seu comportamento. O valor de um parâmetro de controle para o qual ocorre uma mudança no comportamento de um sistema é chamado de ponto de bifurcação (GUCKENHEIMER; HOLMES, 1983).

Um tipo de bifurcação bastante frequente e importante é aquele onde, para certo valor do parâmetro de controle, existe uma oscilação de período  $T$ . Ao se atingir um segundo valor para o parâmetro de controle, a oscilação torna-se instável e uma oscilação de período  $2T$  aparece. Este tipo de bifurcação é chamada de *bifurcação de duplicação de período*. Certos sistemas podem apresentar uma série infinita de bifurcações de duplicação de período com um ponto de acumulação a partir do qual surge o comportamento caótico. Esse caminho para o caos é chamado de *rota de duplicação de períodos* (FEIGENBAUM, 1978).

Para verificar a existência de uma rota de duplicação de períodos no modelo apresentado neste trabalho, foi construído um *diagrama de bifurcações* com o parâmetro  $n$ . Para 200 valores de  $n \in [40, 60]$  foi feito um mapa de retorno onde se registraram 300 cruzamentos. Os pontos registrados em cada mapa foram então colocados em um gráfico como função de  $n$ . O resultado está na Figura 8. Nessa

figura podemos perceber nitidamente a presença de uma rota de duplicação de períodos para caos, representada por uma cascata de duplicações de períodos. Isso reforça a conjectura de que o sistema representado pela Equação 5 realmente apresenta soluções caóticas.

Outra evidência de que o modelo de cadeia produtiva da Figura 2 pode apresentar comportamento caótico seria o fato de ele apresentar atratores de dimensão não inteira. Normalmente, quando falamos de dimensão, estamos nos referindo à dimensão euclidiana, onde os objetos geométricos têm sempre dimensão inteira: um ponto tem dimensão zero, uma linha tem dimensão um, uma superfície tem dimensão dois etc. Contudo, quando falamos de atratores estranhos, é possível encontrar objetos geométricos complexos com dimensões não inteiras. Tais objetos geométricos são genericamente chamados de *fractais* (MANDELBROT; WHEELER, 1983). Vamos evidenciar o fato de que o atrator da Figura 6d é realmente caótico calculando sua dimensão fractal por meio da *dimensão de correlação*. A dimensão de correlação é muito utilizada para o cálculo da dimensão de atratores devido ao fato de poder ser calculada facilmente com um algoritmo desenvolvido na década de 80 (GRASSBERGER; PROCACCIA, 1983a). A dimensão de correlação é dada por:

$$D_2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log C(m, \epsilon)}{\log \epsilon}, \tag{7}$$

onde:

$$C(m, \epsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i, j=1}^N \Theta[\epsilon - |x_i^{(m)} - x_j^{(m)}|] \tag{8}$$

é conhecida como *integral de correlação*. Nas equações 7 e 8 o parâmetro  $m$  é a dimensão de imersão do atrator, que é escolhida durante a reconstrução de Takens.  $N$  é o número de pontos do atrator,  $x_i^{(m)}$  é o vetor  $m$ -dimensional associado ao  $i$ -ésimo ponto do atrator reconstruído.  $\Theta$  é a função de Heaviside, que retorna zero quando o argumento é menor que zero, e um quando o argumento é maior ou igual a zero. A função  $C(m, \epsilon)$  representa a fração de todas as distâncias, entre pares distintos de pontos sobre a trajetória de fase do atrator, que não excedem um certo valor de raio  $\epsilon$ . O valor de  $D_2$  é dado pela inclinação da reta definida pelo gráfico  $\log C(m, \epsilon) \times \log \epsilon$  para  $\epsilon$  pequeno. Como na prática desconhecemos qual é a dimensão de imersão adequada à reconstrução do atrator, procede-se da seguinte forma: o valor de  $D_2$  é calculado para toda uma gama de dimensões de imersão  $m$ . Quando a dimensão  $m$  for suficientemente alta, e o valor de  $\epsilon$  apropriado,  $D_2$  deve convergir para um patamar bem definido no gráfico  $D_2 \times \epsilon$  (FERRARA;

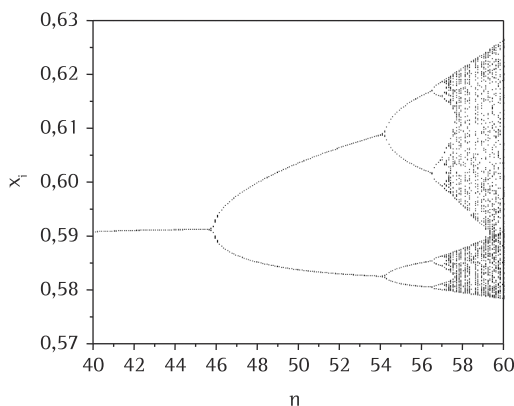


Figura 8. Diagrama de bifurcações da Equação 5 em relação ao parâmetro de controle  $n$ . Os parâmetros de cada mapa de retorno foram os mesmos utilizados para a construção da Figura 7. Fonte: autor.

DO PRADO, 1994). Na Figura 9 vemos o resultado do cálculo da dimensão de correlação do atrator da Figura 6d. O valor obtido foi  $D_2 = 1,85$ , o que mostra que o atrator possui baixa dimensão e que esta dimensão é fractal (não inteira).

Um último teste que pode ser feito para verificar se o atrator da Figura 6d é realmente caótico é testar se além da ausência de periodicidade e da dimensão fractal existe sensibilidade às condições iniciais. Diz-se que o sistema apresenta esse tipo de sensibilidade se, para qualquer par de condições iniciais separadas inicialmente por uma distância  $\Delta_0$ , a evolução do sistema cria trajetórias que afastam esses pontos a uma taxa proporcional a  $e^{\lambda t}$ , ou seja,  $\Delta_t \approx \Delta_0 e^{\lambda t}$ . O expoente  $\lambda$  é conhecido na literatura como *expoente de Lyapunov*. A existência de um expoente de Lyapunov positivo indica que o sistema é caótico. Para determinar o expoente de Lyapunov calcula-se, para diversos valores de dimensão de imersão  $m$ , o logaritmo da expansão média de pontos vizinhos no atrator em função do tempo. A inclinação das curvas  $\ln(\bar{\Delta}_t) \times t$  deve então convergir para o valor de  $\lambda$  (KANTZ, 1994). A Figura 10 mostra as curvas  $\ln(\bar{\Delta}_t) \times t$  obtidas para o atrator da Figura 6d.

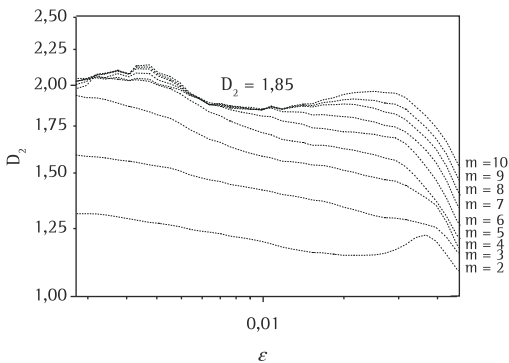


Figura 9. Determinação da dimensão de correlação ( $D_2$ ) do atrator da Figura 6d. Fonte: autor.

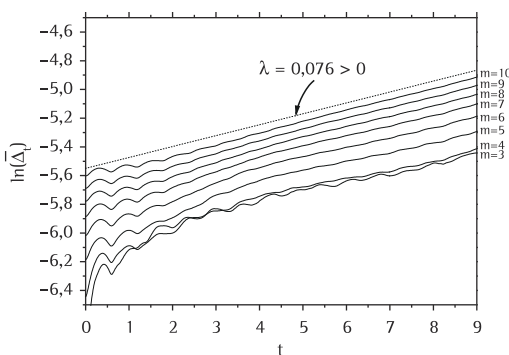


Figura 10. Determinação do expoente de Lyapunov ( $\lambda$ ) do atrator da Figura 6d. Fonte: autor.

Note que a inclinação das curvas converge para o valor de  $\lambda = 0,0076 > 0$ . Isso indica que o atrator apresenta divergência exponencial das trajetórias, caracterizando a dependência sensível às condições iniciais e, portanto, o comportamento caótico.

Por fim, em todas as simulações, os valores dos retardos foram 0,6, 1,9 e 0,8. Eventualmente poder-se-ia argumentar que o fato do mínimo múltiplo comum entre estes parâmetros ser igual a 45,6 poderia levar ao surgimento de frequências periódicas de batimento. Para dirimir qualquer dúvida sobre periodicidade induzida por parâmetros comensuráveis, realizou-se a simulação com um conjunto de parâmetros próximos à região onde o comportamento caótico foi percebido:  $\tau_1 = 0,43 \sqrt{2} = 0,608112$ ,  $\tau_2 = 1,10 \sqrt{3} = 1,90526$  e  $\tau_3 = 0,36 \sqrt{5} = 0,804984$ . Para esse conjunto de parâmetros incomensuráveis foram observadas as mesmas sequências de duplicação de período e complexidade nas órbitas dos mapas de fase.

## 6. Conclusões

O objetivo deste trabalho foi apresentar um modelo teórico de cadeia produtiva que, baseado unicamente em ciclos de realimentação negativa (autorregulados), pode apresentar comportamento caótico e imprevisível como decorrência da estrutura e das políticas de gerenciamento da cadeia. Em geral, ao se estudar oscilações em variáveis econômicas, duas perguntas básicas devem ser feitas: As causas principais das flutuações estão associadas a mecanismos endógenos ou exógenos ao sistema? E podem tais oscilações ser caracterizadas por meio de modelos determinísticos? Para sistemas que tenham similaridade com o modelo que foi descrito neste trabalho, evidências de soluções caóticas podem ser indicativas de que eventuais flutuações irregulares na demanda e nos preços podem ser devidas não apenas a flutuações estocásticas, mas podem estar intimamente relacionadas com a própria estrutura determinística de gerenciamento da cadeia, ou seja, por suas regras, políticas e capacidades. Em outras palavras, as flutuações podem ser devidas à forma como as empresas reagem às variações geradas por elas mesmas nos parâmetros dos mercados.

A habilidade humana em tomar decisões é limitada. Mesmo que os tomadores de decisão tenham *informação perfeita* é mais provável que o comportamento econômico dos atores obedeça a regras ou procedimentos simples, ao invés de buscar caminhos para atingir ótimos globais (SIMON, 1979).

Esta simplicidade está presente no modelo na Figura 2. Há apenas dois mecanismos competindo no sistema. O primeiro é o crescimento estimulado

da produção, que é uma resposta retardada ao preço de mercado. Esse mecanismo é descrito pelo segundo termo a direita da equação. O segundo mecanismo é o escoamento do estoque gerado pela demanda de mercado. Apesar da simplicidade das relações, o balanceamento desses dois mecanismos é que gera as oscilações irregulares no estoque de mercado  $E$ .

O início da produção é desencadeado pelo surgimento de preços relativamente elevados, que sinalizam uma alta demanda e uma baixa oferta. Essa situação oferece a promessa de retornos atrativos, incentivando para que haja a produção. De forma análoga, quando há uma queda na demanda e um aumento na oferta, os preços caem e a produção no mercado tipicamente se reduz. É costume assumir na prática que as flutuações de alta ou baixa demanda podem ser causadas, por exemplo, por ruídos externos no consumo ou no fornecimento do produto. Isso pode ser verdade, todavia o tempo de retardo natural entre a detecção de uma oportunidade e o início da produção leva a uma amplificação da reação das empresas. Se os preços de certo produto são baixos, então sua oferta produtiva cresce lentamente, devido a custos iniciais e custos fixos de produção; se os preços forem altos, então a oferta também crescerá lentamente, devido a limitações de oferta e capacidade de produção. Nas faixas intermediárias de preços, o mercado acaba por oscilar freneticamente, buscando ajustes que levam a um aumento da irregularidade, que em casos específicos pode se tornar caótico. Como ocorre no modelo descrito neste trabalho.

Por fim, o comportamento caótico tem sido extensivamente estudado nos campos da física e das ciências naturais; entretanto, a existência de caos em dados econômicos e em modelos de cadeias produtivas é ainda uma questão aberta e vasta para estudo. Várias contribuições têm sido feitas na literatura relativas a este tema (BARNETT; CHEN, 1988; MacKEY, 1989; BROCK; DECHERT, 1990; LEBARON, 1994; RAMSEY; ROTHMAN, 1994). Este trabalho busca também dar uma contribuição para esta área e incentivar outros pesquisadores a se interessarem por essas aplicações.

## Referências

- ARTHUR, W. B. *Increasing Returns and Path Dependence in the Economy*. University of Michigan Press, 1994.
- BAKER, C.; BOCHAROV, G.; RIHAN, F. A report on the use of delay differential equations in numerical modelling in the biosciences. *Numerical Analysis Report*, v. 343, 1999.
- BARNETT, W. A.; CHEN, P. The aggregation-theoretic monetary aggregates are chaotic and have strange attractors: an econometric application of mathematical chaos. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM IN ECONOMIC THEORY AND ECONOMETRICS, 3., 1988, Austin. *Proceedings...* Cambridge University Press, 1988. <http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511664342.012>
- BEAN, L. H. The Farmers' Response to Price. *Journal of Farm Economics*, v. 11, n. 3, p. 368-385, 1929. <http://dx.doi.org/10.2307/1229848>
- BELLEN, A.; ZENNARO, M. *Numerical methods for delay differential equations*. Oxford University Press, 2003. <http://dx.doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198506546.001.0001>
- BENABOU, R.; TIROLE, J. *Self-Knowledge and Self-Regulation An Economic Approach*. The Psychology of Economic Decisions, 2004.
- BOX, G.; JENKINS, G.; REINSEL, G. *Time series analysis*. San Francisco: Holden-day, 1970.
- BROCK, W. A.; DECHERT, W. D. *Nonlinear Dynamical Systems: Instability and Chaos in Economics*. Social Systems Research Institute, University of Wisconsin, 1990.
- CAMERER, C. F. Does Strategy Research Need Game Theory? *Strategic Management Journal*, v. 12, p. 137-152, 1991. <http://dx.doi.org/10.1002/smj.4250121010>
- EBERLEIN, R. *Vensim 5.1 Reference Manual*. Ventana Systems, 2003.
- ECKMANN, J. P. Roads to turbulence in dissipative dynamical systems. *Reviews of Modern Physics*, v. 53, n. 4, p. 643-654, 1981. <http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.53.643>
- FARMER, D. Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical system. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 4, n. 3, p. 366-393, 1982.
- FEIGENBAUM, M. J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *Journal of Statistical Physics*, v. 19, n. 1, p. 25-52, 1978. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01020332>
- FERNANDES, A. Dinâmica de Sistemas e Business Dynamics: Tratando a Complexidade no Ambiente de Negócios. In: ENCONTRO NACIONAL DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO - ENEGEP, 11., 2001, Salvador. *Anais...* Salvador: ABEPRO, 2001.
- FERRARA, N. F.; DO PRADO, C. P. C. *Caos, uma introdução*. São Paulo: Edgard Blucher, 1994.
- FIGUEIREDO, J. et al. Chaos in two-loop negative feedback systems. *Physical Review E*, v. 65, n. 5, p. 51905, 2002.
- FORRESTER, J. W. *Industrial dynamics*. MIT Press, 1961.
- FORRESTER, J. W. *Urban Dynamics*. Productivity Press, 1969.
- FRASER, R. W. A method for evaluating supply response to price underwriting. *Australian Journal of Agricultural Economics*, v. 32, n. 1, p. 22-36, 1988.
- GEORGANTZAS, N. C.; ACAR, W. *Scenario-driven planning: learning to manage strategic uncertainty*. Quorum Books, 1995.
- GLASS, L.; MALTA, C. Chaos in multi-looped negative feedback systems. *Journal of theoretical biology*, v. 145, n. 2, p. 217-223, 1990.
- GRASSBERGER, P.; PROCACCIA, I. Characterization of Strange Attractors. *Physical Review Letters*, v. 50, n. 5, p. 346-349, 1983a. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.50.346>
- GRASSBERGER, P.; PROCACCIA, I. Measuring the strangeness of strange attractors. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 9, n. 1-2, p. 189-208, 1983b. [http://dx.doi.org/10.1016/0167-2789\(83\)90298-1](http://dx.doi.org/10.1016/0167-2789(83)90298-1)

- GUCKENHEIMER, J.; HOLMES, P. *Nonlinear Oscillations*. New York: Springer-Verlag, 1983. v. 8291 Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields.
- HEIDEL, J.; MALONEY, J. When can sigmoidal data be fit to a Hill curve. *J. Australian Mathematical Society (Series A, Pure Mathematics and Statistics)*, v. 41, p. 83-92, 1999.
- KANTZ, H. A robust method to estimate the maximal Lyapunov exponent of a time series. *Physics Letters A*, v. 185, n. 1, p. 77-87, 1994. [http://dx.doi.org/10.1016/0375-9601\(94\)90991-1](http://dx.doi.org/10.1016/0375-9601(94)90991-1)
- KANTZ, H.; SCHREIBER, T. *Nonlinear time series analysis*. Cambridge University Press, 2004.
- LEBARON, B. Chaos and Nonlinear Forecastability in Economics and Finance. *Philosophical Transactions: Physical Sciences and Engineering*, v. 348, n. 1688, p. 397-404, 1994.
- LEE, H. L.; PADMANABHAN, V.; WHANG, S. Information Distortion in a Supply Chain: The Bullwhip Effect. *Management Science*, v. 50, n. 12, p. 1875-1886, 2004. Supplement. <http://dx.doi.org/10.1287/mnsc.1040.0266>
- MacKEY, M. C. Commodity price fluctuations: Price dependent delays and nonlinearities as explanatory factors. *Journal of Economic Theory*, v. 48, n. 2, p. 497-509, 1989. [http://dx.doi.org/10.1016/0022-0531\(89\)90039-2](http://dx.doi.org/10.1016/0022-0531(89)90039-2)
- MALTA, C. P.; FIGUEIREDO, J. C. B. Modelling with delay equations: criterium for convergence of a chaotic solution. In: COLÓQUIO BRASILEIRO DE DINÂMICA ORBITAL, 10., 2000, São José dos Campos. *Anais... INPE*, 2000. v. 2, p. 224-236.
- MALTA, C.; TELES, M. Nonlinear delay differential equation: comparison of integration methods. *International Journal of Applied Mathematics*, v. 3, n. 4, p. 379-395, 2000.
- MANDELBROT, B. B.; WHEELER, J. A. The Fractal Geometry of Nature. *American Journal of Physics*, v. 51, p. 286, 1983. <http://dx.doi.org/10.1119/1.13295>
- MORECROFT, J. D. W.; ASAY, D.; STERMAN, J. D. *Modeling for Learning Organizations*. Productivity, Incorporated, 1994.
- PIDD, M. *Computer simulation in management science*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1984.
- PIDD, M. *Modelagem empresarial: ferramentas para tomada de decisão*. Bookman, 1996.
- RAMSEY, J. B.; ROTHMAN, P. Comment on " Nonlinear Monetary Dynamics" by DeCoster and Mitchell. *Journal of Business & Economic Statistics*, v. 12, n. 1, p. 135-136, 1994.
- RUELLE, D.; TAKENS, F. On the nature of turbulence. *Communications in Mathematical Physics*, v. 20, n. 3, p. 167-192, 1971.
- SENGE, P. M. *The fifth discipline fieldbook: strategies and tools for building a learning organization-1994*. New York: Currency, Doubleday, 1994. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01646553>
- SIMON, H. A. Rational decision making in business organizations. *American Economic Review*, v. 69, n. 4, p. 493-513, 1979.
- STERMAN, J. *Business Dynamics*. New York: McGraw-Hill, Inc., 2000.
- TAKENS, F. Detecting strange attractors in turbulence. *Lecture Notes in Mathematics*, v. 898, n. 1, p. 366-381, 1981. <http://dx.doi.org/10.1007/BFb0091924>
- THOMPSON, J. M. T.; STEWART, H. B. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Wiley, 2002.
- WEI, W. *Time series analysis*. Addison-Wesley Reading, MA, 1990.
- WILDING, R. Chaos theory: implications for supply chain management. *International Journal of Logistics Management*, v. 9, n. 1, p. 43, 1998.

## Deterministic chaos in simplified supply chain model

### Abstract

The purpose of this study was to present a simplified supply chain model where the relations between the number of competitors, the delay in production adjustments, and the intensity response of each company lead, intrinsically, to the emergence of chaotic oscillations in supply and demand. In the considered model, developed with the use of the System Dynamics methodology, the irregular fluctuations in demand and prices are closely related to the supply chain structure, that is, its rules, policies and capabilities. Discussions about the importance of the study of chaos applied to the economy are developed and specific techniques for characterization of chaotic behavior in economic time series are presented.

### Keywords

Supply chain. Chaotic cycles. System dynamics.